

中国科学院大学硕士研究生入学考试

《数学专业综合》考试大纲

本《数学专业综合》考试大纲适用于中国科学院大学硕士研究生入学考试。所涉及的复分析、拓扑基础、实分析、代数、微分几何以及概率论都是大学数学系本科学生最基本的课程，也是大多数理工科专业学生的必修基础课。要求考生熟悉复分析、拓扑基础、实分析、代数、微分几何以及概率论等课程的基本概念、掌握基本定理、有较强的运算能力和综合分析解决问题的能力。

一、考试的基本要求

要求考生比较系统地理解复分析、拓扑基础、实分析、代数、微分几何以及概率论等课程的基本概念和基本理论，掌握相应的基本思想和方法。要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力。

二、考试方法和考试时间

数学综合考试采用闭卷笔试形式，试卷满分为 150 分，考试时间为 180 分钟。

《数学综合考试试卷》试题分成六个部分，每一部分试题的分值和为 90 分，总值为 540 分。考生需在 540 分的试题中任意选做分值和不超过 150 分的试题并明确标示。如果选做试题的分值和超过 150 分，判卷将按照所选做试题的题号顺序依次判卷直到所做题目分值和超过 150 分题目的前一题，后面所做试题视作无效考试内容。

三、考试内容

(一) 复分析

1. 复数
2. 复函数
3. 解析函数的几何性质
4. 复积分
5. 级数与乘积展开
6. 共形映射与 Dirichlet 问题
7. 椭圆函数(简单介绍)

(二) 拓扑基础

1. 引论. Euler 定理, 拓扑等价, 曲面, 抽象空间, 一个分类定理, 拓扑不变量。
2. 拓扑空间及连续映射. 开集与闭集, 连续映射, 充满空间的曲线, Tietze 扩张定理
3. 拓扑空间的紧致性与连通性. 欧氏空间的有界闭集, Heine Borel 定理, 紧致空间, 乘积空间, 连通性道路连通性
4. 粘合空间. Mbius 带的制作, 粘合拓扑, 拓扑群, 轨道空间

5. 拓扑空间的基本群. 同伦映射, 拓扑空间的基本群, 计算, 同伦型, Brouwer 不动点定理, 平面的分离, 曲面的边界, 复叠空间及其基本性质
6. 单纯剖分. 空间的单纯剖分, 重心重分, 单纯逼近, 复形的棱道群, 轨道空间的单纯剖分
7. 曲面. 分类, 单纯剖分与定向, Euler 示性数, 剜补运算, 曲面符号
8. 单纯同调. 闭链与边缘, 同调群, 单纯映射, 辐式重分, 不变性
9. 映射度与 Lefschetz 数. 球面的连续映射, Euler Poincaré 公式, Borsuk Ulam 定理, Lefschetz 不动点定理

(三) 实分析

1. 抽象积分. 可测函数、简单函数及可积函数的基本概念, 测度的基本性质, 函数列的收敛性, 勒贝格单调收敛定理, Fatou 引理, 控制收敛定理。
2. 正博雷尔 (Borel) 测度. 拓扑中的基本概念, Riesz 表示定理, Borel 测度的正则性, Lebesgue 测度, 可测函数的连续性, Lusin (鲁金) 定理。
3. 空间. 凸函数, Jensen (詹森) 不等式, 空间中的重要不等式: 如 Holder 不等式, Minkowski 不等式, 函数列中的范数收敛与依测度收敛以及几乎处处收敛之间的关系。
4. Hilbert 空间的初等理论. 内积, 平行四边形法则, 投影定理, 正交基, 傅立叶级数。
5. Banach 空间技巧的例子. 赋范空间, 贝尔定理及其推论, Hahn-Banach 定理, Poisson 积分。
6. 复测度. 全变差, 绝对连续性, Radon-Nikodym (拉东-尼柯迪姆) 定理及其推论, 空间上的有界线性泛函。
7. 微分. 测度的导数, Hardy-Littlewood 极大函数, 微积分基本定理, 可微变换。
8. 乘积空间的积分. 乘积空间的测度, Fubini 定理, 乘积测度的完备化, 卷积, 分布函数。

(四) 代数

1. 群论
2. 环与代数、模论
3. 范畴论初步、泛代数
4. 域论与 Galois 理论
5. 表示理论基础

(五) 微分几何

1. 空间区域的几何坐标系. 欧氏空间, 黎曼和伪黎曼空间, 欧氏空间的变换群, 弗莱纳公式, 伪欧几里德空间
2. 曲面论. 空间曲面的几何, 第二基本型, 球面的度量, 伪欧几里德空间中的类空曲面, 几何中的复语言, 解析函数, 曲面度量的共形形式
3. 高斯映射的几何. 高斯映射以及基本性质, 局部坐标下的高斯映射, 向量场, 极小曲面
4. 内蕴几何. 等距, 共形变换, 测地线, 平行移动, 指数映射, 测地极坐标
5. 变分法. 一维变分问题, 守恒定律, 哈密顿系统, 相空间的几何理论, 测地方程的二阶变分

(六) 概率论

1. 随机事件与概率. 随机现象与统计规律性, 样本空间, 随机事件及其运算, 古典概率, 几何概率, 概率空间, 概率的公理化结构
2. 条件概率与事件的独立性. 条件概率与乘法公式, 全概率公式, Bayes 公式, 事件的独立性, 独立重复试验, Bernoulli 试验
3. 随机变量及其分布. 随机变量及其分布 (离散型, 连续型), 多维随机变量及其分布 (离散型, 连续型), 条件分布与随机变量的独立性, 随机变量的函数及其分布
4. 随机变量的数字特征. 数学期望与方差, 矩, 协方差与相关系数, 熵与信息量, 条件期望与最优预测, 母函数, Laplace 变换, 矩母函数, 特征函数
5. 极限定理. 随机变量的收敛性, 弱大数定律, 强大数定律, 中心极限定理
6. 随机过程初步. 随机过程及其有限维分布族, 独立增量过程, 平稳增量过程, 二阶矩过程, 正交增量过程, Gauss 过程, Brown 运动, Poisson 过程, 离散时间 Markov 链初步, 平稳过程及其遍历论初步
7. 随机模拟. Monte Carlo 方法与随机数的产生, 随机变量的模拟 (离散型, 连续型), Markov 链的模拟, 积分的近似计算

四、主要参考书目

1. 《复分析》原书第三版, Lars V. Ahlfors, 机械工业出版社。
2. 《基础拓扑学》, M. A. Armstrong, 孙以丰译, 北京大学出版社。
3. 《Real and Complex Analysis》, Walter Rudin. 《实分析与复分析》(英文版第 3 版), 机械工业出版社, 2006。
4. 《代数学引论》第三卷 (第二版), 柯斯特利金, 高等教育出版社, 2007。
5. 《现代几何学: 方法与应用 (第一卷) —— 曲面几何, 变换群与场》, 杜布洛文, 诺维可夫, 福明柯, 高等教育出版社。
6. 《A First Course in Probability》(9th Ed.), Sheldon M. Ross, Pearson, 2012. 中文版《概率论基础教程》为童行伟, 梁宝生译, 机械工业出版社, 2014。

编制单位: 中国科学院大学

日期: 2023 年 6 月 26 日